

Научно-техническая олимпиада «Старт в науку»
2024-2025 уч. года
Физика

Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Черновики не проверяются.

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 5.

Максимальное число баллов за олимпиаду 20.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит **0 баллов**.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

Ф9.1-1 На заводе по переработке нефтепродуктов в чане с остатками производства после длительного отстоя образовались три слоя: водяной, толщиной $a = 1$ метр, слой масел толщиной $b = 0,5$ м и слой вязкой парафиновой смеси, толщиной $c = 0,2$ м. Невесомый пузырёк газа объёмом 1 мм^3 образовался на дне сосуда. Причём, двигаясь в вязкой парафиновой смеси, на пузырёк действовало постоянное ускорение такой величины, что всплыв на поверхность он на ней остановился. Определите общее время подъема пузырька. Плотность воды равна $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$, плотность масел $\rho_2 = 0,8\rho_1$.

Указание: считайте, что эффективная масса пузырька при движении с ускорением в невязкой жидкости равна массе вытесненной им жидкости.

Ф9.1-2 На заводе по переработке нефтепродуктов в чане с остатками производства после длительного отстоя образовались три слоя: водяной, толщиной $a = 0,7$ метра, слой масел толщиной $b = 0,3$ м и слой вязкой парафиновой смеси, толщиной $c = 0,1$ м. Невесомый пузырёк газа объёмом 1 мм^3 образовался на дне сосуда. Причём, двигаясь в вязкой парафиновой смеси, на пузырёк действовало постоянное ускорение такой величины, что всплыв на поверхность он на ней остановился. Определите общее время подъема пузырька. Плотность воды равна $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$, плотность масел $\rho_2 = 0,8\rho_1$.

Указание: считайте, что эффективная масса пузырька при движении с ускорением в невязкой жидкости равна массе вытесненной им жидкости.

Решение.

В первом и втором слое пузырёк всплывает равноускоренно под действием силы Архимеда с ускорением $a = F_A/m_{\text{эфф.}} = g$, но оно направлено вертикально вверх. Время всплытия для этих двух слоёв будет равно $t_1 = \sqrt{2(a+b)/g}$. За время всплытия он приобретёт скорость $v = gt = \sqrt{2(a+b)g}$. Двигаясь равнозамедленно в последнем слое пузырёк движется время $t_2 = 2c/v$. Итого время всплытия составит $t = t_1 + t_2 = \sqrt{2(a+b)/g} + 2c/v$.

Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Получено выражение для ускорения движения пузырька.	2
2	Найдено время прохождения первых двух слоёв.	1
3	Найдено время движения в последнем слое.	1
4	Получен ответ.	1

Ф9.2-1 При выращивании некоторых многолетних сельскохозяйственных культур важно, чтобы плодородный слой земли зимой не промерзал полностью. Рассмотрим ферму, в которой плодородный слой земли имеет глубину $h = 60$ см, а под плодородным слоем расположен песчаный суглинок, который почти не пропускает воду и имеет низкий коэффициент теплопроводности. Согласно прогнозу погоды ночью на вторник выпадет $m = 3$ кг на квадратный метр снега и обещают солнечный день и среднесуточную температуру воздуха 1°C . В среду среднесуточная температура упадёт до -1°C , после чего снова потеплеет. Промёрзнет ли земля? Испарением пренебречь.

Теплоемкость земли равна $1 \text{ кДж/кг} \cdot ^\circ\text{C}$. Плотность земли 2700 кг/м^3 . Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг . Коэффициент теплоотдачи из воздуха в почву с учетом всех факторов порядка $10 \text{ Вт/м}^2 \cdot ^\circ\text{C}$.

Ф9.2-2 При выращивании некоторых многолетних сельскохозяйственных культур важно, чтобы плодородный слой земли зимой не промерзал полностью. Рассмотрим ферму, в которой плодородный слой земли имеет глубину $h = 60$ см, а под плодородным слоем расположен песчаный

суглинок, который почти не пропускает воду и имеет низкий коэффициент теплопроводности. Согласно прогнозу погоды ночью на вторник выпадет $m = 4$ кг на квадратный метр снега и обещают солнечный день и среднесуточную температуру воздуха 1°C . В среду среднесуточная температура упадёт до -2°C , после чего снова потеплеет. Промёрзнет ли земля? Испарением пренебречь.

Теплоемкость земли равна $1 \text{ кДж/кг} \cdot ^\circ\text{C}$. Плотность земли 2700 кг/м^3 . Удельная теплота плавления льда 330 кДж/кг . Коэффициент теплоотдачи из воздуха в почву с учетом всех факторов порядка $10 \text{ Вт/м}^2 \cdot ^\circ\text{C}$.

Решение.

Заметим, что за сутки на 1 метр квадратный почвы будет передано не более чем $Q_1 = \kappa \Delta T t$, где ΔT – максимальная разница температур. С другой стороны для промерзания земли её температура должна понизиться до 0°C и растаявший снег замёрзнуть. Требуемое тепло на 1 метр квадратный больше чем $Q_2 = \lambda m_{\text{сн.}} + \rho_{\text{зем.}} h \Delta T_1$, где ΔT – разница температур между 0°C и начальной температурой. Подставив числа заметим, что $Q_1 < Q_2$, а значит земля не промерзнет.

Критерии проверки.

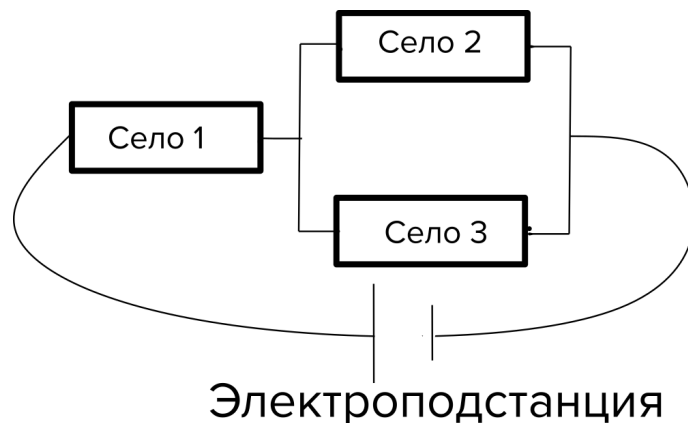
№	Пункт критериев	Балл
1	Получена оценка на теплоту, получаемую от воздуха.	2
2	Получена оценка на теплоту, необходимую для остывания промерзания.	2
3	Получено то, что почва не замёрзнет.	1

Ф9.3-1 Линия электропередач представляет собой два длинных провода один из которых подключается к «плюсу» электростанции, а второй к «минусу». От электроподстанции в удалённые три села, расположенных в вершинах правильного треугольника со стороной $a = 2$ км идёт линия электропередач. Возле ближайшего к станции села, расположенного на расстоянии $l = 3$ км, каждый кабель разделяется на два и идёт к двум другим сёлам вдоль сторон треугольника. В конечных сёлах линия замыкается на нагрузку потребителей электричества, а в промежуточном нагрузка подключается к «плюсовому» проводу перед ветвлением. Оцените, какая мощность теряется на линиях электропередач, если напряжение на подстанции $U = 3$ кВ, эффективное сопротивление сёл $R = 1$ МОм. Сопротивление одного метра провода равно $r = 1.75 \cdot 10^{-4} \text{ Ом/м}$.

Ф9.3-2 Линия электропередач представляет собой два длинных провода один из которых подключается к «плюсу» электростанции, а второй к «минусу». От электроподстанции в удалённые три села, расположенных в вершинах правильного треугольника со стороной $a = 3$ км идёт линия электропередач. Возле ближайшего к станции села, расположенного на расстоянии $l = 5$ км, каждый кабель разделяется на два и идёт к двум другим сёлам вдоль сторон треугольника. В конечных сёлах линия замыкается на нагрузку потребителей электричества, а в промежуточном нагрузка подключается к «плюсовому» проводу перед ветвлением. Оцените, какая мощность теряется на линиях электропередач, если напряжение на подстанции $U = 3$ кВ, эффективное сопротивление сёл $R = 1$ МОм. Сопротивление одного метра провода равно $r = 1.75 \cdot 10^{-4} \text{ Ом/м}$.

Решение.

Нарисуем эквивалентную схему для электроснабжения сёл.



Полное сопротивление данной схемы будет равно $R_0 \approx 3/2R$. Тогда, ток в схеме будет равен $I = U/R_0$. Считая что ток разделяется пополам между селом 2 и селом 3, запишем мощность джоулевых потерь на проводах:

$$W = 2I^2rl + 4(I/2)^2ra.$$

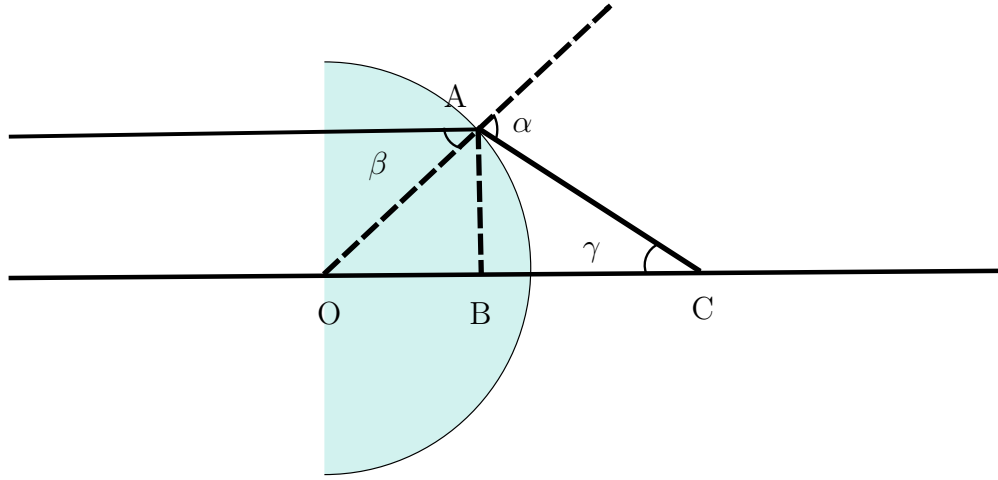
Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Получена эквивалентная электрическая схема.	2
2	Найдено общее сопротивление схема.	1
3	Найден ток в цепи.	1
4	Получено выражение для мощности и ответ.	1

Ф9.4-1 В обсерватории пропало электричество. Астрономы решили не терять времени зря и запасти электроэнергию на ночь, для этого они решили установить линзу в форме полуцилиндра (радиус основания $R = 1$ м, высота $H = 0,5$ м, показатель преломления $n = 1.5$) в крышу, чтобы собрать лучи на солнечную панель (длина панели $H = 0,5$ м, ширина $2L = 1$ м). Какая длина фокусного отрезка такой линзы? Где следует установить солнечную панель, чтоб собрать наибольшее количество лучей? Считайте, что штатив позволяет обеспечивать нормальное падение лучей на линзу.

Ф9.4-2 В обсерватории пропало электричество. Астрономы решили не терять времени зря и запасти электроэнергию на ночь, для этого они решили установить линзу в форме полуцилиндра (радиус основания $R = 1.5$ м, высота $H = 0,4$ м, показатель преломления $n = 1.4$) в крышу, чтобы собрать лучи на солнечную панель (длина панели $H = 0,4$ м, ширина $2L = 1$ м). Какая длина фокусного отрезка такой линзы? Где следует установить солнечную панель, чтоб собрать наибольшее количество лучей? Считайте, что штатив позволяет обеспечивать нормальное падение лучей на линзу.

Решение.



Солнечные лучи можно считать параллельным пучком. Тогда рассмотрим ход лучей в линзе. Так как лучи падают нормально, на первой поверхности они не преломляются. Для второй, по закону Снеллиуса получим:

$$n \sin \beta = \sin \alpha \quad (1)$$

Для предельно преломившегося луча ($\sin \alpha_{\text{кр}} = 1$):

$$\beta_{\text{кр}} = \arcsin \frac{1}{n} \approx 38,7^\circ \quad (2)$$

Получаем ограничение на угол падения, теперь рассмотрим ход произвольного луча и найдем его пересечение с ГОО. Для треугольника АОС:

$$\beta + \gamma = \alpha \quad (3)$$

Для треугольника АОВ:

$$AB = R \sin \beta \quad (4)$$

Для треугольника АВС:

$$BC = AB \cdot \text{ctg} \gamma \quad (5)$$

Для точки пересечения получаем:

$$OC = OB + BC = R(\cos \beta + \sin \beta \cdot \text{ctg}(\alpha - \beta)) \quad (6)$$

Подставив значения $\beta_{\text{кр}} = \arcsin \frac{1}{n}$ и $\alpha_{\text{кр}} = \frac{\pi}{2}$ для предельного луча, получим один из концов фокального отрезка:

$$OC_1 = R(\cos \beta_{\text{кр}} + \sin \beta_{\text{кр}} \tan \beta_{\text{кр}}) = R \left(\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}} \right) = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (7)$$

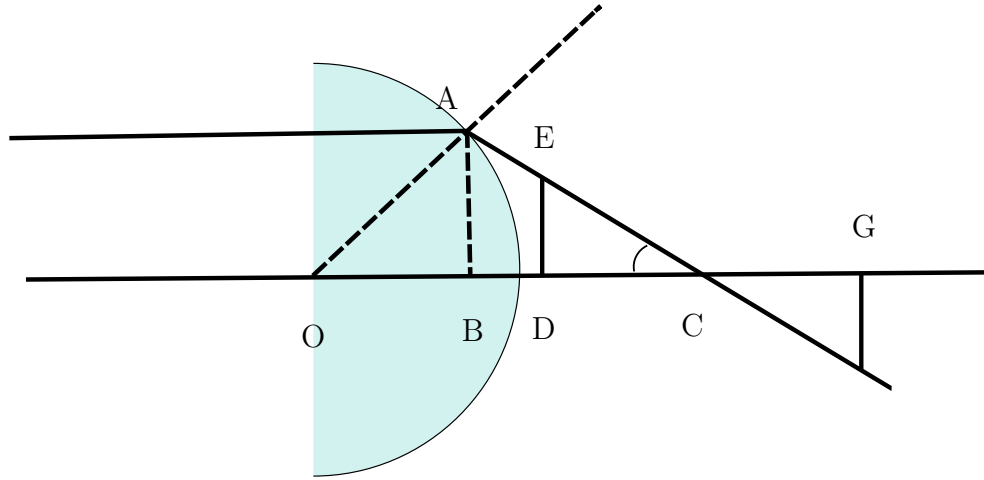
Теперь рассмотрим лучи в параксиальном приближении. В этом случае линзу можно считать тонкой с радиусами кривизны $R_1 = \infty$ и $R_2 = R$. Тогда второй конец фокального отрезка, с учетом радиуса линзы:

$$OC_2 = R + \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \frac{nR}{n-1} \quad (8)$$

Найдем длину фокального отрезка:

$$C_1C_2 = OC_2 - OC_1 = \frac{nR}{\sqrt{n-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \quad (9)$$

Найдем положение солнечной панели, при котором все лучи будут на нее попадать. Из подобия треугольников ABC_1 и DEC_1 , где DE - полстороны панели, получаем:



$$\frac{DC_1}{BC_1} = \frac{ED}{AB} \quad (10)$$

$$\frac{DC_1}{BC_1} = \frac{L}{R \sin \alpha_{кр}} \quad (11)$$

$$DC_1 = \frac{L}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (12)$$

Так как лучи распространяются по прямым и в силу симметрии:

$$C_1G = DC_1 = \frac{L}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (13)$$

Тогда панель следует установить между точками D и G :

$$OD = OC_1 - DC_1 = \frac{nR - L}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (14)$$

$$OG = OC_1 + C_1G = \frac{nR + L}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (15)$$

Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Получен конец фокального отрезка для параксиального приближения.	1
2	Получена точка пересечения ГОО для толстой линзы, найдем критический угол.	1
3	Получен второй конец фокального отрезка.	1
4	Рассмотрен предельный случай расположения панели.	1
5	Получен ответ для возможного расположения панели.	1

Ф10.1-3 Астрофизик Василий, находясь на конференции в Ялте, стал от скуки делать «блинчики» на воде камушками. После отскока от воды, камушек способен подняться на 20% меньшую высоту по сравнению с абсолютно упругим ударом. С какой скоростью Василию нужно горизонтально бросить камушек с высоты 1 метр, чтобы он попал после «блинчика» в верхнюю точку буйка высотой 50 см, находящегося на расстоянии 10 метров от берега?

Ф10.1-4 Астрофизик Василий, находясь на конференции в Ялте, стал от скуки делать «блинчики» на воде камушками. После отскока от воды, камушек способен подняться на 15% меньшую высоту по сравнению с абсолютно упругим ударом. С какой скоростью Василию нужно горизонтально бросить камушек с высоты 1,5 метра, чтобы он попал после «блинчика» в верхнюю точку буйка высотой 70 см, находящегося на расстоянии 8 метров от берега?

Решение.

Допустим начальная скорость камушка равна v_0 , а высота h . Тогда первый «блинчик» произойдёт через время $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ в точке $x_1 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

При ударе о воду камушек теряет часть $\sqrt{\alpha}$ модуля вертикальной скорости, но сохраняет горизонтальную. Максимальная высота подъема камушка после удара о воду будет составлять $h_2 = (1 - \alpha)h = v_y^2/2g$. Расстояние, которое нужно пройти до буйка равно $x_2 = v_0 t_2$. Так как камешек должен удариться о боек в его верхней точке H , то за время t_2 камешек должен успеть подняться до верхней точки буйка $H = v_y t_2 - gt_2^2/2$. Подставил всё в одну формулу $H = \sqrt{2g(1 - \alpha)h}(L/v_0 - \sqrt{2h/g}) - g/2(L/v_0 - \sqrt{2h/g})^2$ Выражая необходимую скорость получаем ответ

Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Найдена точка удара камешка о воду.	1
2	Найдена вертикальная составляющая скорости после удара.	1
3	Получено условие удара камня о боек.	2
4	Получен ответ	1

Ф10.2-3 Один моль идеального газа подвергается адиабатическому сжатию, в результате которого его давление увеличивается в 2,73 раза. Начальная температура газа составляет $T_1 = 300$ К, а конечная температура достигает $T_2 = 400$ К. После эксперимента газ взвесили и оказалось, что его масса составила 2 грамма. Чему равна масса одного атома газа?

Ф10.2-4 Один моль идеального газа подвергается адиабатическому сжатию, в результате которого его давление увеличивается в 1,7 раз. Начальная температура газа составляет $T_1 = 300$ К, а конечная температура достигает $T_2 = 350$ К. После эксперимента газ взвесили и оказалось, что его масса составила 32 грамма. Чему равна масса одного атома газа?

Решение.

Уравнение адиабаты для идеального газа:

$$PV^\gamma = \text{const}$$

Переходя к переменным T и P , получаем:

$$PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const}$$

Введем коэффициент $\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1}$. Тогда для отношения давлений:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^\alpha$$

Выражая α :

$$\alpha = \frac{\ln \frac{P_1}{P_2}}{\ln \frac{T_1}{T_2}}$$

Подставляя численные значения, находим $\alpha \approx 3,5$. Это значение соответствует показателю адиабаты $\gamma = \frac{7}{5}$, характерному для двухатомного газа. Таким образом, молекула газа состоит из двух атомов. Тогда масса одного атома составляет $m_A = m/2N_A$.

Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Записано уравнение адиабаты и получен показатель адиабаты.	2
2	Получено выражение для количества атомов в молекуле.	1
3	Записано выражение для массы атома.	1
4	Получен ответ	1

Ф10.3-3 При исследовании астероидов и спутников планет с каменной поверхностью большой проблемой является налипание пыли на проводящие поверхности исследовательских аппаратов. Подобные спутники не имеют магнитного поля, в силу чего пылинки заряжаются из-за космических лучей. Их характерный заряд равен $q \approx 1$ нКл, а радиус $r \approx 100$ мкм. Считая что проводящая поверхность космического аппарата представляет собой плоскость оцените какой потенциал необходимо сообщить поверхности, чтобы пылинки не налипали.

Ф10.3-4 При исследовании астероидов и спутников планет с каменной поверхностью большой проблемой является налипание пыли на проводящие поверхности исследовательских аппаратов. Подобные спутники не имеют магнитного поля, в силу чего пылинки заряжаются из-за космических лучей. Их характерный заряд равен $q \approx 2$ нКл, а радиус $r \approx 150$ мкм. Считая что проводящая поверхность космического аппарата представляет собой плоскость оцените какой потенциал необходимо сообщить поверхности, чтобы пылинки не налипали.

Решение.

Запишем закон сохранения энергии для пылинки, пренебрегая её кинетической энергией. Пылинка прилипнет, если энергия взаимодействия плоскости и пылинки будет отрицательной. Запишем энергию пылинки как сумму энергий от взаимодействия с зарядом плоскости и индуцированным изображением пылинки.

$$W = q\varphi_s + q\varphi_i$$

Так как поле вне пылинки совпадает с полем точечного заряда, то потенциал изображения будет равен $\varphi_i = -k\frac{q}{2r}$. Также, из-за малости размера пылинки пренебрежем отличием потенциала плоскости и потенциала в центре пылинки.

С учётом того, что условие налипания $W = 0$, получим

$$\varphi_s = k \frac{q}{2r} = 45 \text{ кВ.}$$

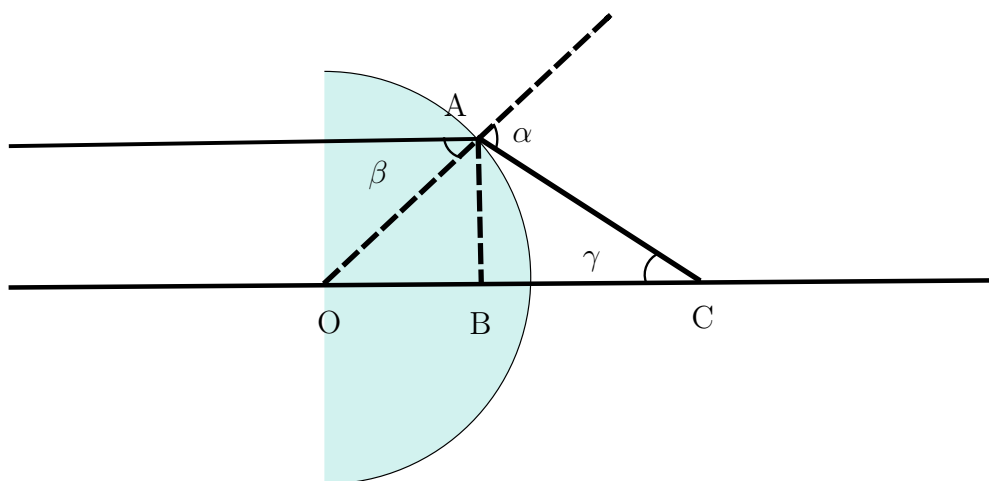
Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Получено условие прилипания пылинки.	2
2	Получен потенциал изображения пылинки.	2
3	Получено выражение для потенциала плоскости и ответ.	1

Ф10.4-3 В обсерватории пропало электричество. Астрономы решили не терять времени зря и запасти электроэнергию на ночь, для этого они решили установить линзу в форме полуцилиндра (радиус основания $R = 0,75$ м, высота $H = 0,4$ м, показатель преломления $n = 1.4$) в крышу, чтобы собрать лучи на солнечную панель (длина панели $H = 0,4$ м, ширина $2L = 0,5$ м). Какая длина фокусного отрезка такой линзы? Где следует установить солнечную панель, чтоб собрать наибольшее количество лучей? Считайте, что штатив позволяет обеспечивать нормальное падение лучей на линзу.

Ф10.4-4 В обсерватории пропало электричество. Астрономы решили не терять времени зря и запасти электроэнергию на ночь, для этого они решили установить линзу в форме полуцилиндра (радиус основания $R = 2$ м, высота $H = 0,5$ м, показатель преломления $n = 1.4$) в крышу, чтобы собрать лучи на солнечную панель (длина панели $H = 0,5$ м, ширина $2L = 1$ м). Какая длина фокусного отрезка такой линзы? Где следует установить солнечную панель, чтоб собрать наибольшее количество лучей? Считайте, что штатив позволяет обеспечивать нормальное падение лучей на линзу.

Решение.



Солнечные лучи можно считать параллельным пучком. Тогда рассмотрим ход лучей в линзе. Так как лучи падают нормально, на первой поверхности они не преломляются. Для второй, по закону Снеллиуса получим:

$$n \sin \beta = \sin \alpha \quad (16)$$

Для предельно преломившегося луча ($\sin \alpha_{\text{кр}} = 1$):

$$\beta_{\text{кр}} = \arcsin \frac{1}{n} \approx 38,7^\circ \quad (17)$$

Получаем ограничение на угол падения, теперь рассмотрим ход произвольного луча и найдем его пересечение с ГОО. Для треугольника АОС:

$$\beta + \gamma = \alpha \quad (18)$$

Для треугольника АОВ:

$$AB = R \sin \beta \quad (19)$$

Для треугольника ABC:

$$BC = AB \cdot ctg\gamma \quad (20)$$

Для точки пересечения получаем:

$$OC = OB + BC = R(\cos \beta + \sin \beta \cdot ctg(\alpha - \beta)) \quad (21)$$

Подставив значения $\beta_{\text{кр}} = \arcsin \frac{1}{n}$ и $\alpha_{\text{кр}} = \frac{\pi}{2}$ для предельного луча, получим один из концов фокального отрезка:

$$OC_1 = R(\cos \beta_{\text{kp}} + \sin \beta_{\text{kp}} \tan \beta_{\text{kp}}) = R \left(\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n^2 - 1}} \right) = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (22)$$

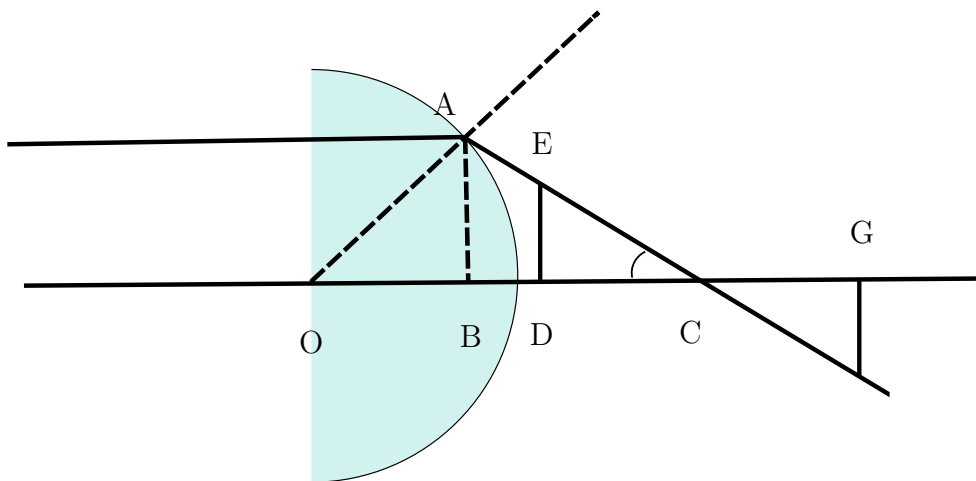
Теперь рассмотрим лучи в параксиальном приближении. В этом случае линзу можно считать тонкой с радиусами кривизны $R_1 = \infty$ и $R_2 = R$. Тогда второй конец фокального отрезка, с учетом радиуса линзы:

$$OC_2 = R + \frac{1}{n-1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \frac{nR}{n-1} \quad (23)$$

Найдем длину фокального отрезка:

$$C_1 C_2 = OC_2 - OC_1 = \frac{nR}{\sqrt{n-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \quad (24)$$

Найдем положение солнечной панели, при котором все лучи будут на нее попадать. Из подобия треугольников ABC_1 и DEC_1 , где DE - полстороны панели, получаем:



$$\frac{DC_1}{BC_1} = \frac{ED}{AB} \quad (25)$$

$$\frac{DC_1}{BC_1} = \frac{L}{R \sin \alpha_{\text{кр}}} \quad (26)$$

$$DC_1 = \frac{L}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (27)$$

Так как лучи распространяются по прямым и в силу симметрии:

$$C_1G = DC_1 = \frac{L}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (28)$$

Тогда панель следует установить между точками D и G :

$$OD = OC_1 - DC_1 = \frac{nR - L}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (29)$$

$$OG = OC_1 + C_1G = \frac{nR + L}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (30)$$

Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Получен конец фокального отрезка для параксиального приближения.	1
2	Получена точка пересечения ГОО для толстой линзы, найдем критический угол.	1
3	Получен второй конец фокального отрезка.	1
4	Рассмотрен предельный случай расположения панели.	1
5	Получен ответ для возможного расположения панели.	1

Ф11.1-5 В XVII-XVIII веках были распространены так называемые воздушные телескопы. Это телескопы с длинной трубой (или вообще без неё), где объектив и окуляр были соединены лишь направляющими. Производители телескопов той эпохи обнаружили, что объективы с очень большим фокусным расстоянием не имеют заметной хроматической аберрации. Все телескопы в то время были рефракторами, то есть состояли из двух собирающих двояковыпуклых софокусных линз. Давайте рассмотрим рекордный телескоп Христиана Гюйгенса. Линзы изготовлены из стекла ($n = 1.5$). Диаметр объектива составляет 22 см, а фокусное расстояние окуляра — 30 мм. Однако наточить длиннофокусный объектив было тяжело, и оказался дефектным, и его радиус кривизны зависит от угла ϕ по закону:

$$R(\phi) = R_0 + \kappa \cdot \phi.$$

Где $R_0 = 210$ футов = 64 метра, а $\kappa = 60$ м/рад. Из-за дрожания атмосферы звёзды представляют собой круг диаметром 1 угловую секунду. Необходимо найти, какой угловой размер звёзд видел Гюйгенс.

Ф11.1-6 В XVII-XVIII веках были распространены так называемые воздушные телескопы. Это телескопы с длинной трубой (или вообще без неё), где объектив и окуляр были соединены лишь направляющими. Производители телескопов той эпохи обнаружили, что объективы с очень большим фокусным расстоянием не имеют заметной хроматической аберрации. Все телескопы в то время были рефракторами, то есть состояли из двух собирающих двояковыпуклых софокусных линз. Давайте рассмотрим рекордный телескоп Христиана Гюйгенса. Линзы изготовлены из стекла ($n = 1.5$). Диаметр объектива составляет 33 см, а фокусное расстояние окуляра — 30 мм. Однако наточить длиннофокусный объектив было тяжело, и оказался дефектным, и его радиус кривизны зависит от угла ϕ по закону:

$$R(\phi) = R_0 + \kappa \cdot \phi.$$

Где $R_0 = 210$ футов = 64 метра, а $\kappa = 40$ м/рад. Из-за дрожания атмосферы звёзды представляют собой круг диаметром 1 угловую секунду. Необходимо найти, какой угловой размер звёзд видел Гюйгенс.

Решение.

Телескоп состоит из объектива и окуляра — двояковыпуклых линз. Фокусное расстояние двояковыпуклой линзы определяется формулой шлифовщика линзы:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

Где R_1 и R_2 — радиусы кривизны поверхностей. При чем знаки определяются следующим образом: смотрим со стороны хода лучей. Если линза выпукла «на нас», то берем со знаком плюс $R_1 = R(\phi)$, а если «от нас», то берем с минусом $R_2 = -R(\phi)$:

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R(\phi)} - \frac{1}{-R(\phi)} \right) = (n - 1) \cdot \frac{2}{R(\phi)}, F(x)$$

$$F(x) = \frac{R(\phi)}{2(n - 1)}.$$

В идеальной системе фокус был бы на расстоянии

$$F_0 = \frac{R_0}{2(n - 1)}.$$

Найдем максимальный угол.

$$\varphi_{max} = \arctg(\frac{D}{2F_0}) \approx \frac{D}{2F_0}.$$

Найдем зависимость от высоты:

$$F(x) = \frac{1}{2(n-1)}(R_0 + \kappa(\frac{x}{F_0}))$$

Линейный размер в фокальной плоскости:

$$h = \rho F(x)$$

Тогда понимая, что длинна телескопа $L = F + f = 64030$ мм. фиксирована. То угол под которым видно изображение в фокальной плоскости

$$\alpha = \rho \frac{F(x)}{L - F(x)}$$

Видно, что функция угла от фокусного расстояния объектива возрастает, а значит этот угол будет максимальный, при наибольшем фокусном расстоянии. Понятно что изображение для наблюдателя будет немного в расфокусе, но мы наблюдаем звезды, поэтому пренебрежём этим, нас больше интересует угловой размер, чем качество изображения.

$$\alpha_{max} = \rho \frac{(R_0 + \kappa(\frac{D}{2F_0}))}{L - (R_0 + \kappa(\frac{D}{2F_0}))} = 1 \cdot \frac{(64000 + 6000(\frac{220}{2 \cdot 64000}))}{64030 - (64000 + 6000(\frac{220}{2 \cdot 64000}))} = 3250'' \approx 0.9^\circ$$

Заметим, что без учета дефекта линзы:

$$\alpha_{min} = \rho \frac{R_0}{L - R_0} = 1 \cdot \frac{64000}{64030 - 64000} = 2130'' \approx 0.6^\circ$$

Отметим также, что телескопы Гершеля, хотя и позволяли достигать очень большого увеличения (до 7000 раз), но на практике наблюдатель использовал увеличения 150–300, что в первую очередь диктовалось погодными условиями. Только при рассмотрении планетарных туманностей и двойных звёзд применялись увеличения от 500 до 3000

Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Вычислено максимальное фокусное расстояние или угол.	1
2	Правильно применена формула шлифовщика.	1
3	Получен второй конец фокального отрезка.	1
4	Получена формула углового размера от фокусного расстояния.	1
5	Проанализирована формула для углового размера и получен ответ.	1

Ф11.2-5 Слинки - игрушка, представляющая из себя мягкую массивную пружинку. Количество витков слинки обычно достаточно велико, а их толщина крайне мала. Из-за её строения у неё наблюдается много интересных свойств. Например, полностью растянутая под действием силы тяжести пружинка слинки, подвешенная за верхний виток после отпускания быстро сожмётся так, что нижние витки практически не сдвинутся. В нерастянутом состоянии витки практически не деформированы. Масса слинки $m = 100$ г, а длина в растянутом состоянии равна $L = 1,2$ м. На какой высоте от её конца находится положение центра масс слинки. Оцените энергию потерь при таком «схлопывании» слинки, которые возникают из-за неупругих соударений витков друг с другом.

Ф11.2-6 Слинки - игрушка, представляющая из себя мягкую массивную пружинку. Количество витков слинки обычно достаточно велико, а их толщина крайне мала. Из-за её строения у неё наблюдается много интересных свойств. Например, полностью растянутая под действием силы тяжести пружинка слинки, подвешенная за верхний виток после отпущения быстро сожмётся так, что нижние витки практически не сдвинутся. В нерастянутом состоянии витки практически не деформированы. Масса слинки $m = 150$ г, а длина в растянутом состоянии равна $L = 1,5$ м. На какой высоте от её конца находится положение центра масс слинки. Оцените энергию потерь при таком «схлопывании» слинки, которые возникают из-за неупругих соударений витков друг с другом.

Решение.

Разобьём слинки на N одинаковых кусочков (витков) одинаковой массы. Натяжение в n -ом витке с нижнего конца будет равно

$$T(n) = (n - 1) \frac{mg}{N}$$

Растяжение витка (жёсткость одного витка равна Nk):

$$l(n) = (n - 1) \frac{mg}{N^2 k}$$

Длина и растяжение витков слинки будут сравнимы друг с другом, потому длина растянутой слинки равна (С учётом, что число витков много больше 1):

$$L = \sum_{i=0}^N l(n) = \frac{N(N-1)}{2} \frac{mg}{N^2 k} \approx \frac{mg}{2k}$$

Энергия деформация слинки будет равна:

$$E_{deform} = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} k N l(i)^2 = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} N k \left((i-1) \frac{mg}{N^2 k} \right)^2 \approx \frac{1}{6} \frac{(mg)^2}{k}$$

Таким образом,

$$E_{deform} = \frac{1}{3} mgL$$

Вычислим положение центра масс.

$$h = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^N \frac{m}{N} (x_i - \frac{1}{2} l(i)) = \frac{mg}{2N^3 k} \sum_{i=0}^N ((i-1)i - (i-1)) = \frac{mg}{2N^3 k} \sum_{i=0}^N (i-1)^2$$

Получаем:

$$h \approx \frac{mg}{2N^3 k} \frac{(N-1)^3}{3} \approx \frac{mg}{6k} = \frac{L}{3}$$

Можем также рассчитать скорость центра масс сразу после схлопывания (так как он находится в свободном падении с ускорением g):

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

Таким образом, кинетическая энергия слинки сразу после схлопывания:

$$E_{kin} = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{3} mgL$$

№	Пункт критериев	Балл
1	Расчитана длина слинки через массу слинки и её жесткость.	1
2	Получена полная энергия деформации.	1
3	Получено положение центра масс растянутой слинки.	1
4	Посчитаны потери энергия	2

А энергия потерь:

$$E_{loss} = E_{deform} + mgh - E_{kin} = \frac{1}{3}mgL$$

Критерии проверки.

Ф11.3-5 При исследовании астероидов и спутников планет с каменной поверхностью большой проблемой является налипание пыли на проводящие поверхности исследовательских аппаратов. Подобные спутники не имеют магнитного поля, в силу чего пылинки оказываются заряжаются из-за космических лучей с характерным зарядом $q \approx 3$ нКл и радиусом $r \approx 150$ мкм. Считая что проводящая поверхность космического аппарата представляет собой плоскость оцените какой потенциал необходимо сообщить поверхности, чтобы пылинки не налипали.

Ф11.3-6 При исследовании астероидов и спутников планет с каменной поверхностью большой проблемой является налипание пыли на проводящие поверхности исследовательских аппаратов. Подобные спутники не имеют магнитного поля, в силу чего пылинки оказываются заряжаются из-за космических лучей с характерным зарядом $q \approx 1,5$ нКл и радиусом $r \approx 200$ мкм. Считая что проводящая поверхность космического аппарата представляет собой плоскость оцените какой потенциал необходимо сообщить поверхности, чтобы пылинки не налипали.

Решение.

Запишем закон сохранения энергии в случае, когда пылинка летит навстречу плоскости. Пылинка прилипнет, если энергия взаимодействия плоскости и пылинки будет отрицательной. Следовательно, пренебрегая кинетической энергией пылинки, запишем энергию пылинки как сумму энергий от взаимодействия с зарядом плоскости и индуцированным изображением пылинки.

$$E = q\varphi_s + q\varphi_i$$

Так как поле вне пылинки совпадает с полем точечного заряда, то потенциал изображения будет равен $\varphi_i = -k\frac{q}{2r}$. Также, из-за малости размера пылинки пренебрежем отличием потенциала плоскости и потенциала в центре пылинки.

С учётом того, что условие налипания $E = 0$, получим

$$\varphi_s = k\frac{q}{2r} = 9 \text{ кВ.}$$

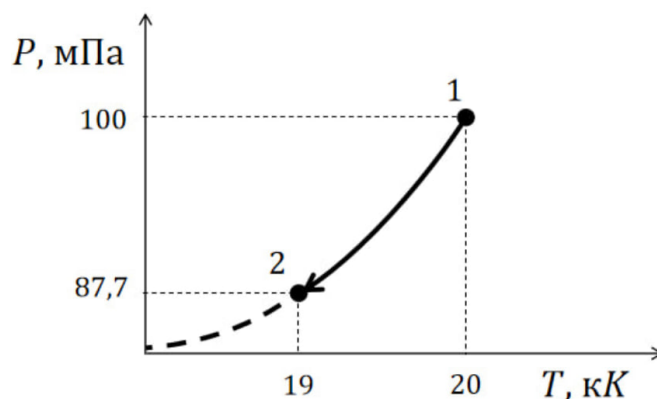
Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Получено условие прилипания пылинки.	2
2	Получен потенциал изображения пылинки.	2
3	Получено выражение для потенциала плоскости и ответ.	1

Ф11.4-5 Один моль идеального газа подвергается адиабатическому сжатию, в результате которого его давление увеличивается в 2,7 раза. Начальная температура газа составляет $T_1 = 300$ К, а конечная температура достигает $T_2 = 399$ К. Затем один моль того же газа адиабатически

расширяется в рабочей камере плазменного двигателя, находящегося в условиях космического вакуума. Используя график процесса, изображенный на рисунке, определите степень диссоциации газа. Оцените энергию диссоциации одного моля молекул газа. Помните, что низкое давление и экстремально высокая температура способствуют значительной диссоциации молекул.

Ф11.4-6 Один моль идеального газа подвергается адиабатическому сжатию, в результате которого его давление увеличивается в 2,23 раза. Начальная температура газа составляет $T_1 = 400$ К, а конечная температура достигает $T_2 = 499$ К. Затем один моль того же газа адиабатически расширяется в рабочей камере плазменного двигателя, находящегося в условиях космического вакуума. Используя график процесса, изображенный на рисунке, определите степень диссоциации газа. Оцените энергию диссоциации одного моля молекул газа. Помните, что низкое давление и экстремально высокая температура способствуют значительной диссоциации молекул.



Решение.

Уравнение адиабаты для идеального газа:

$$PV^\gamma = \text{const}$$

Переходя к переменным T и P , получаем:

$$PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const}$$

Введем коэффициент $\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1}$. Тогда для отношения давлений:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^\alpha$$

Выражая α :

$$\alpha = \frac{\ln \frac{P_1}{P_2}}{\ln \frac{T_1}{T_2}}$$

Подставляя численные значения, находим $\alpha \approx 3,48$, что близко к 3,5. Это значение соответствует показателю адиабаты $\gamma = \frac{7}{5}$, характерному для двухатомного газа. Таким образом, молекула газа состоит из двух атомов.

Аналогичный расчет для второго процесса в рабочей камере двигателя дает показатель адиабаты $\gamma = 1,644$. Это говорит о том, что при данных условиях молекулы газа начинают диссоциировать. Теперь вклад в изобарную и изохорную теплоемкость вносят как молекулы изначального газа, так и новые молекулы атомарного газа. Распишем, как показатель адиабаты зависит от степени диссоциации:

Показатель адиабаты:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

Изобарная теплоемкость:

$$C_p = \frac{i+2}{2}\nu R$$

Изохорная теплоемкость:

$$C_V = \frac{i}{2}\nu R$$

Вспоминая, что для двухатомного газа (изначального, до диссоциации) $i = 5$, а для одноатомного (после диссоциации) $i = 3$, а также учитывая, что при диссоциации одной двухатомной молекулы образуются два атома, получаем:

$$C_p = \frac{7}{2}R(1 - \alpha) + 5R\alpha$$

$$C_V = \frac{5}{2}R(1 - \alpha) + 3R\alpha$$

Итого, показатель адиабаты зависит от степени диссоциации газа следующим образом:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7 + 3\alpha}{5 + \alpha}$$

Подстановка показателя адиабаты, рассчитанного ранее в этом же пункте, дает значение для степени диссоциации $\alpha = 0,9$ (большинство молекул продиссоциировали). Тогда энергию диссоциации можно оценить как энергию теплового движения молекул:

$$E \sim RT \approx 166 \text{ кДж/моль}$$

Для сравнения, энергия диссоциации молекул водорода составляет 436 кДж/моль, что указывает на то, что оценка по порядку величины оценка является справедливой.

Критерии проверки.

№	Пункт критериев	Балл
1	Записано уравнение для адиабаты и получено выражение для показателя адиабаты.	1
2	Определено число атомов в молекуле газа.	1
3	Верно записаны выражения для изобарной и изохорной теплоемкостей смеси	1
4	Получен верный ответ для степени диссоциации	1
5	Получен верный и обоснованный ответ для энергии диссоциации	1

**Межвузовский центр воспитания и развития талантливой молодежи в области
естественно-математических наук «Физтех-Центр»**

Сборник подготовили:

....

Под общей редакцией ...

Авторы задач и составители: ...

Компьютерный набор

Материалы данного конкурса доступны для свободного некоммерческого использования (при использовании ссылка на источник обязательна).

© Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
2024-2025.